

# ETAPA SEMIFINAL ESTATAL DE LA 21ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Tiempo límite: 4 horas.

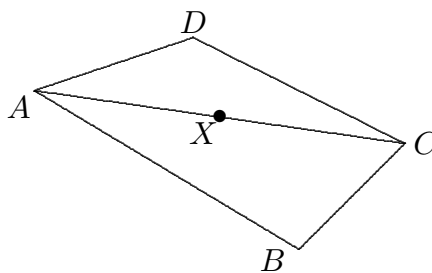
Escribe todos los razonamientos.

No puedes usar calculadora.

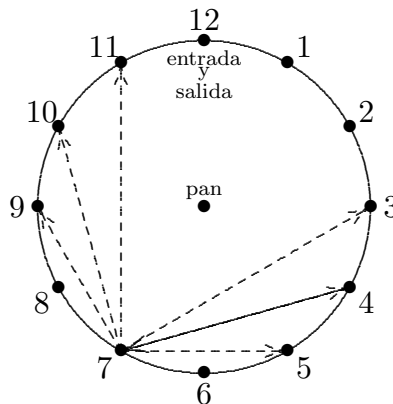
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.

Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

1. Para  $a$  un entero positivo llamemos  $\langle a \rangle$  al número que se obtiene multiplicando cada cifra de  $a$  por 2 y escribiendo los números así obtenidos uno a continuación de otro. Por ejemplo  $\langle 126 \rangle = 2412$  y  $\langle 809 \rangle = 16018$ . Probar que no es posible encontrar dos enteros positivos distintos  $a$  y  $b$  tales que  $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ .
2. En el cuadrilátero  $ABCD$  se tiene  $\angle BAC = \angle CAD$  y  $BC$  es perpendicular a  $AB$ . Un punto  $X$  sobre la diagonal  $AC$  es tal que  $XD$  es perpendicular a  $AD$  y la distancia de  $X$  a  $B$  es igual a la longitud del lado  $BC$ . Prueba que  $X$  está sobre la diagonal  $BD$ .



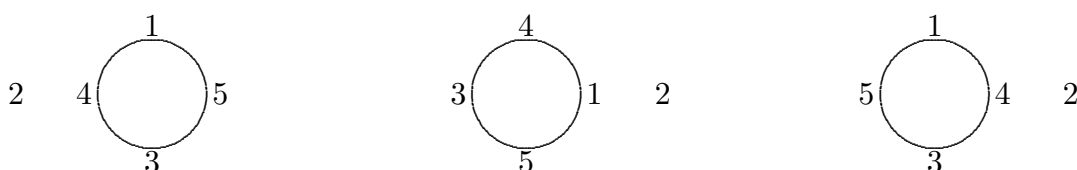
3. El pájaro Piolín quiere comerse un pedazo de pan que se encuentra en el centro de un reloj circular y después de comérselo, escapar. Piolín debe entrar y salir por donde está el número 12. Piolín sólo puede volar de un número a otro en línea recta con las siguientes reglas: En el primer vuelo, avanza en cualquier sentido máximo 1 número (es decir, se puede ir al 1, al 11 o quedarse en el 12); si en un determinado vuelo avanzó  $n$  números, en el siguiente vuelo puede avanzar  $n - 1$ ,  $n$  o  $n + 1$  números en cualquier sentido. Por ejemplo, si en un paso voló del 4 al 7 (es decir, avanzó 3), en el siguiente puede volar avanzando 2, 3 o 4 números para llegar al 9, 10 u 11 si va en el sentido de las manecillas del reloj, o al 3, 4 o 5 si va en el otro sentido (ver la figura). Sólo puede recoger el pan si pasa por encima de él cuando va volando de un número a otro. ¿Cuál es el mínimo número de vuelos que requiere hacer Piolín para escapar con el pan?



4. Encuentra el entero positivo  $A$  que satisface

$$A^2 = 4 \cdot 2006 + 4 \cdot 2004 + 4 \cdot 2002 + \dots + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 1.$$

5. Cinco niños se dividen en grupos y en cada grupo se toman de la mano formando una rueda para bailar girando. ¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir si es válido que haya grupos con cualquier número de niños entre 1 y 5 (y puede haber cualquier número de grupos)? (Nota: En la figura de abajo se da un ejemplo en que los cinco niños se han numerado y se han dividido en dos grupos, uno con 4 alumnos y otro con 1; la primera distribución y la segunda se consideran una misma, pero la tercera es distinta de las otras dos.)



6. Cada vez que el mago Merlín toca con su varita mágica un cuadrado de una cuadrícula de  $n \times n$ , donde  $n$  es un entero impar, el color de todos los cuadros que están en cualquiera de las dos diagonales donde está el cuadro que tocó cambian de color de blanco a gris y viceversa (también el cuadro que tocó cambia). Al principio todos los cuadros son blancos. (Por ejemplo, en la figura se ilustra a la izquierda qué pasa si  $n = 7$  y Merlín toca al principio el cuadro  $A$ , y a la derecha se ilustra lo que pasa si después de haber tocado  $A$  toca  $B$ .) En un determinado momento Merlín logró que todos los cuadros fueran grises. Explica cómo pudo haberlo hecho.

