Etapa Semifinal Estatal de la
23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2009

Tiempo límite: 4 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

1. ¿Cuál es el mínimo n con el cual 100 tarjetas numeradas del 1 al 100 se pueden separar en n montones (no necesariamente del mismo tamaño) de manera que cada montón tenga al menos dos tarjetas y en un mismo montón no haya dos tarjetas con suma múltiplo de 3?

2. En la figura de abajo a la izquierda, ABC es un triángulo equilátero de lado 2. El círculo inscrito en ese triángulo tiene centro O; D, E y F son los puntos de intersección del círculo con las rectas AO, BO y CO, respectivamente; L, M y N son puntos medios de los lados de ABC; $LHGC$ es cuadrado; P, Q, R y S son puntos medios de los lados de $LHGC$; RZ es perpendicular a HG, y HZ es paralela a QR. Usando las líneas de la figura es posible "caminar" de A a Z de varias maneras. Determinar (con demostración) cuál es el camino más corto y calcular su longitud.

3. ¿Cuántos números de 19 cifras se pueden formar utilizando los dígitos 1, 2 y 3 si la diferencia entre dos cifras consecutivas debe ser siempre exactamente de 1?

4. ¿Para cuántos números a del 2 al 25 se tiene que $a^3 - a$ es un múltiplo de 84?

5. En un triángulo ABC el ángulo en B mide 20º y el ángulo en C mide 40º. El punto E se encuentra sobre el lado BC y es tal que $\angle CAE = \angle EAB$. Probar que $|BC| - |AB| = |AE|$.

6. ¿De cuántas maneras se pueden dibujar flechas entre parejas de puntos en la figura de la derecha si las tres condiciones siguientes deben satisfacerse:
Ninguna flecha empieza y termina en el mismo renglón o en la misma columna
En cada renglón y en cada columna hay exactamente una flecha que empieza ahí.
En cada renglón y en cada columna hay exactamente una flecha que termina ahí.