Etapa Semifinal Estatal de la

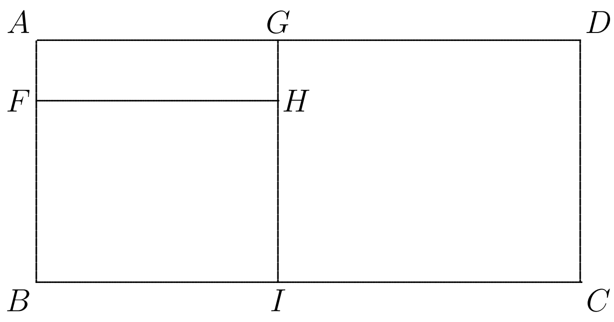
25ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2011

Tiempo límite: 4 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.

1. Sean $\mathcal{K}_A$ y $\mathcal{K}_B$ círcunferencias del mismo radio con centros A y B, respectivamente, y tales que A está en $\mathcal{K}_B$. Sea C en $\mathcal{K}_A$ tal que la medida g del ángulo $\angle ABC$ satisfaga $30^\circ < g < 60^\circ$. Sobre $\mathcal{K}_B$ tómese el punto D (distinto de A) para el cual $\angle CBD = g$ y constrúyase la circunferencia $\mathcal{K}_C$ que pasa por A y tiene centro C. De D hacia C trácese una recta hasta que toque a $\mathcal{K}_C$ y sea E el punto de intersección. Probar que $\angle AEC = g$.

2. A una cena llegan 3 parejas. Se quieren sentar en una mesa redonda de manera que nadie quede junto a su pareja. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar si Adela ya tiene un lugar asignado fijo?

3. Un rectángulo de lados enteros $ABCD$ y área 756 se parte en tres rectángulos de lados enteros: $AFHG$, $FBIH$ y $GICD$ como se muestra en la figura, y de manera que el área de $FBIH$ es el triple que la de $AFHG$ y el área de $GICD$ es 5 veces el área de $AFHG$. Determinar todas las posibilidades para la longitud de AD.



4. ¿Cuántos elementos a lo más podemos escoger dentro del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ si no queremos que la suma de dos de los números escogidos sea múltiplo de un número al cuadrado mayor que 1?

5. ¿De cuántas maneras es posible acomodar los números del 1 al 10 de manera que del primero al séptimo vayan creciendo, que el séptimo sea mayor que el octavo, y que del octavo al décimo vayan creciendo otra vez? (Por ejemplo, una posibilidad es $1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 4, 7, 9$.)