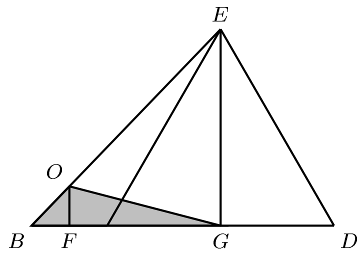
Soluciones del Examen Semifinal de la 16a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Solución 1. Hay varias parejas que cumplen con la condición. Por ejemplo, 54 es un múltiplo de 2 y de 3 pero no de 5 ni de 11, así que tiene exactamente 2 pelotas. Por otra parte, 55 es múltiplo de 5 y de 11, pero no de 2 ni de 3, así que también tiene exactamente 2 pelotas. Así, 54 y 55 es una pareja de canastas como la que buscamos.

Otra manera de encontrar la pareja que buscamos es considerar el mínimo común múltiplo de 2, 3, 5 y 11 (que es $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330$, pues no tienen factores comunes). Claramente la canasta 330 tiene 4 pelotas y la 331 (lo mismo que la 329) está vacía.

Solución 2. Como los números 1, 4, 9 y 16 son cuadrados de un número entero, al multiplicar dos de ellos se obtiene otro número cuadrado, así que hay que tachar de la lista al menos a 3 de ellos. Como $2 \cdot 8 = 16$ es un cuadrado hay que tachar también al 2 o al 8. De la misma manera, como $3 \cdot 12 = 36$ hay que tachar al 3 o al 12. Por lo anterior, para no tener cuadrados como producto de dos números habría que tachar al menos 5 números de la lista.

Solución 3. Llamemos O al punto de interseción de BE y AF. Para calcular el área del triángulo OBG es suficiente calcular el área del triángulo BEG y restarle el área del triángulo OEG. Observemos que la distancia de O a EG es la misma que la de F a EG. Por otro lado, usando el teorema de Pitágoras tenemos que $EG = \sqrt{ED^2 - GD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Así, el área sombreada es $\frac{BG \cdot EG}{2} - \frac{GE \cdot FG}{2} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{3}}{2} - \frac{\frac{5}{2} \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

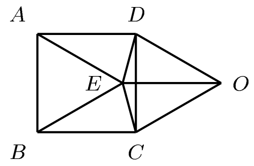


Solución 4. Notemos que, en términos de x_2, los términos de la sucesión se ven como sigue:

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & x_2 + 1 \\ x_4 & = & 2(x_2 + 1) \\ x_5 & = & 2^2(x_2 + 1) \\ x_6 & = & 2^3(x_2 + 1) \\ & \vdots & \\ x_k & = & 2^{k-3}(x_2 + 1) \\ & \vdots & \\ x_{n+1} & = & 2^{n-2}(x_2 + 1) = 1000. \end{array}$$

Así, tenemos que $2^{n-2}(x_2 + 1) = 1000$. Como la sucesión es la más larga posible, $n - 2$ debe ser la mayor potencia de 2 que divida a 1000, o sea que $n - 2 = 3$ (pues $1000 = 2^3 \cdot 5^3$). De lo anterior $x_{2+1} = \frac{1000}{2^3} = 125$ y por lo tanto $x_2 = 124$.

Solución 5. En la figura tenemos que el ángulo $\angle CBE = 30^o$. Como $CB = BE$, el triángulo CBE es isósceles y el ángulo $\angle CEB = \frac{180^o - 30^o}{2} = 75^o$, y de la misma manera $\angle AED = 75^o$. El ángulo $\angle CEO$ es igual a $\frac{360^o - 75^o - 75^o - 60^o}{2} = 75^o$, y como el triángulo OCE es isósceles ($OC = OE$ son radios del círculo) tenemos que $\angle COE = 180^o - 75^o - 75^o = 30^o$, y del mismo modo podemos obtener $\angle EOC = 30^o$. Como el ángulo $\angle COD = 60^o$, tenemos que el sector es una sexta parte del círculo (pues $6 \cdot 60^o = 360^o$), así que su área es $\frac{1}{6}$.



Solución 6. Para cubrir la cuadrícula las fichas pueden colocarse de dos maneras: verticalmente (cubriendo toda una columna) u horizontalmente (cubriendo dos cuadritos de un renglón). Es claro que, si hay dos cuadritos de un renglón cubiertos por una ficha horizontal, los otros dos cuadritos que comparten la columna con ellos (arriba o abajo) también deben estar cubiertos por una ficha horizontal.

El problema equivale a ver de cuántas maneras puede escribirse 8 como suma de 1's y 2's (en orden). Por ejemplo, en la ilustración del enunciado, la cubierta corresponde a la suma de los números (1,2,1,1,1,1,1).

* Hay una sola manera de poner las fichas en posición vertical (corresponde a la suma de 8 1's).

* Hay siete formas de escribir un solo 2 y todos los demás 1's (corresponden a cubiertas que tienen exactamente dos fichas horizontales).

* Para ver las cubiertas que tienen exactamente 4 fichas horizontales hay que considerar las formas de escribir 8 con dos 2's y cuatro 1's. Esas son quince:

$$\left.\begin{array}{c}(2,2,1,1,1,1)\\(2,1,2,1,1,1)\\(2,1,1,2,1,1)\\\vdots\end{array}\right\}5$$

$$\left.\begin{array}{c}(1,2,2,1,1,1)\\(1,2,1,2,1,1)\\\vdots\end{array}\right\}4$$

$$\vdots$$

* Las cubiertas que tienen 6 fichas horizontales exactamente corresponden a las quintetas que tienen tres 2's y dos 1's. Es fácil ver que son diez.

* Hay una sola cubierta con todas las fichas horizontales.

En total son 1+7+15+10+1=34.