Soluciones del Examen Semifinal de la 17a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Solución 1. Los números cuyos dígitos suman 6 son múltiplos de 3, y por lo tanto no pueden ser primos. Vemos entonces que (a) y (e) se contradicen uno al otro, así que el inciso falso es uno de ellos y los otros incisos (b), (c) y (d) deben ser ciertos. Los números entre 40 y 110 que tienen 2 dígitos iguales son: 44, 55, 66, 77, 88, 99, 100 y 101. La suma de las cifras de ninguno de ellos es 6, pero 101 es primo, así que ese es el número de mi casa.

Solución 2. Llamemos O al punto medio de BC y M y N a las intersecciones del círculo y los lados AB y AC, respectivamente (como se muestra en la Figura 1). El triángulo BOM es equilátero pues $BO = OM$ y $\angle MBO = 60^{\circ}$. Análogamente el triángulo NOC es equilátero y por ende también lo son AMN y MNO . Dado que estos cuatro triángulos tienen lado 1, las partes sombreadas completan un sector de 60° de un círculo con radio 1 (como se muestra en la figura 2), cuya área es $\frac{\pi}{6}$.

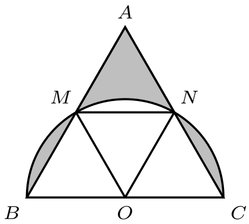


Figura 1

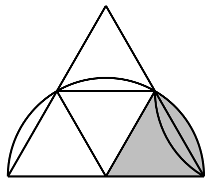
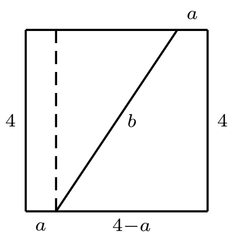


Figura 2

Solución 3. Es fácil convencerse de que hay que buscar entre los capicúas de 2 y 3 cifras (por ejemplo, la diferencia mínima entre 3113 y 3223 es 110, mientras que la diferencia entre 313 y 323 es 10). La diferencia entre los capicúas de dos cifras más cercanos es 11 (como 55 y 66). Con 3 dígitos la diferencia entre los más cercanos es 10 (como entre 747 y 757) y a lo más pasa 10 veces seguidas (por ejemplo de 707 a 797). Observemos que al pasar de 2 a 3 cifras o de 3 a 4 podemos encontrar capicúas con diferencia 2 (99 y 101 o 999 y 1001). Después de todas estas observaciones vemos que hay 3 posibilidades para el año de nacimiento del hombre y todas ellas producen la misma edad mínima: 104 años. Las posibilidades son de 88 a 191, de 99 a 202 y de 898 a 1001.

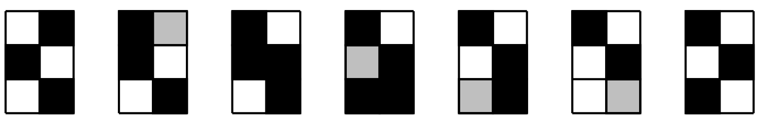
Solución 4. La figura queda así:



Tenemos que $b = 13 - (4 + a + (4 - a)) = 5$. Por Pitágoras tenemos que el otro cateto del triángulo es 3, así que $a + 3 = 4 - a$ y entonces $a = \frac{1}{2}$.

Solución 5. Claramente los 6 números no son iguales. A lo más hay 2 números distintos, digamos a y b, pues si hubiera 3 distintos podríamos encontrar 3 ternas con sumas diferentes. De alguno de ellos (digamos a) debe haber al menos 3 números iguales, así que $3a = 18$ (pues 16 no es múltiplo de 3). Se sigue que $2a + b = 16$ y $b = 4$. Para que las sumas sean las indicadas,6 debe aparecer cinco veces y 4 solo una vez.

Solución 6. En la siguiente figura se muestran 6 jugadas para llegar al tablero B.



El mínimo número de movimientos es 6 puesto que cada cuadro negro requiere al menos 2 jugadas para cambiar a blanco, y ningún movimiento puede cambiar, al mismo tiempo, dos cuadros que originalmente eran negros.