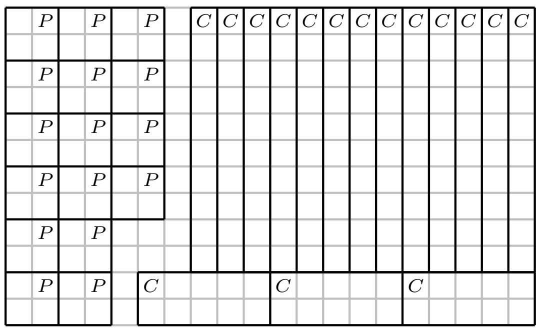
Soluciones del Examen Semifinal 2004

Solución 1. Cada 55 números se borran un total de 15 números: pues hay 11 múltiplos de 5 y 5 múltiplos de 11, pero los múltiplos de 55 son múltiplos comunes a 11 y a 5. Entonces de cada 55 números se quedan 40. Ahora, $2004 = 40 \times 50 + 4$ así que para tener 2004 números debemos haber llegado al $55 \times 50 + 4 = 2754$ y ésta es la respuesta.

Solución 2. Por simetría, todos los ángulos del cuadrílátero y todos sus lados son iguales, así que es un cuadrado (y los ángulos son rectos). Ahora, como P es punto medio de AB, entonces U es punto medio de AV. Por otro lado, en el triángulo rectángulo ABQ un cateto es el doble que el otro, así que lo mismo ocurre en el triángulo semejante AUP, así que $PU = \frac{1}{2}AU$. Llamemos $t = PU$; entonces, aplicando Pitágoras a APU tenemos que $(2t)^2 + t^2 = (\frac{1}{2})^2$, y de aquí que $t^2 = \frac{1}{20}$ y el área de $UVWX$ es $\frac{1}{5}$.

Solución 3. Supongamos que los números son $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ y sea x la mayor diferencia que hay entre dos de ellos. Entonces $b \geq a + x$, $c \geq b + x \geq a + 2x$, $d \geq c + x \geq a + 3x$ y $e \geq d + x \geq a + 4x$. Entonces $100 = a + b + c + d + e \geq 5a + 10x$. Como a debe ser al menos 1, $x \leq \frac{95}{10}$, así que x debe ser menor o igual que 9. Una posible solución para $x = 9$ es $a = 1$, $b = 10$, $c = 19$, $d = 28$ y $e = 42$.

Solución 4. Ya que sobre los gatos no hay ninguna restricción, es igual pensar en cuadritos vacíos o corrales con gatos, pensemos entonces en cuadros vacíos. La cantidad de cuadritos que forman los corrales de los perros y los caballos es $10n + 4n = 14n$. Así, $14n \leq 240$, de donde $n \leq 17$. Si $n = 17$ hay sólo cuadros vacíos, lo cual es claramente imposible. Si $n = 16$, hay 16 cuadros vacíos y el acomodo puede ser el siguiente:



Solución 5. *Primera solución.* Sean $\mathcal{L}_A$ y $\mathcal{L}_C$ rectas paralelas a $\mathcal{L}$ por A y por C, respectivamente. Sea M la intersección de $\mathcal{L}_C$ con AB, y sea P la intersección de CD con $\mathcal{L}_A$. Entonces es claro que los triángulos BMC y CPA son iguales, asi que sus alturas son ambas $7 + 4 = 11$. Entonces la distancia de B a $\mathcal{L}$ es $11 + 5 = 16$. *Segunda solución.* Tracemos rectas perpendiculares a $\mathcal{L}$ por A y por C y rectas paralelas a $\mathcal{L}$ por B y por D, de manera que se forme un rectángulo $RSTU$ (con B sobre RS, C sobre ST, D sobre TU y A sobre UR). Por simetría, $RA = TC = 7 + 5 = 12$, así que $BF = 12 + 4 = 16$.

Solución 6. Llamemos a, b, c, d, e y f a los números en las caras, de manera que a y d aparezcan en caras opuestas y lo mismo ocurra con b y e y con c y f. Entonces $70 = abc + ace + aef + afb + dbc + dce + def + dfb = (a+d)(b+e)(c+f)$. (Esta factorización también se puede ver geométricamente pues cada par de caras opuestas tiene las mismas caras adyacentes; por ejemplo, a y d tienen a todas las demás como adyacentes). Por otro lado, la única factorización de 70 en producto de tres enteros mayores que 1 es $70 = 2 \times 5 \times 7$, así que $a + d$, $b + e$ y $c + f$ son, en algún orden, 2, 5 y 7, de donde $a + d + b + e + c + f = 2 + 5 + 7 = 14$.