ETAPA SEMIFINAL ESTATAL DE LA
20ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

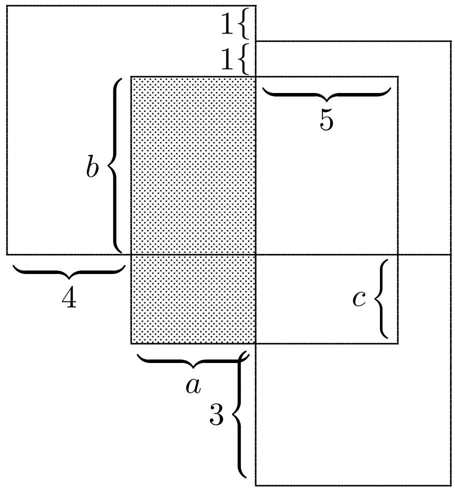
1. Si los dos juegan correctamente, Miguel debe ganar. Para hacerlo, puede seguir varias estrategias; aquí mostramos dos:
   1era forma: Copiar lo que haga Luis en el turno anterior, es decir, si Luis escoge la horizontal número n, Miguel puede escoger hacer continua la vertical número n en el siguiente turno. Siguiendo esta estrategia, llega un momento en que Luis debe escoger una línea junto a otra ya marcada, y en el siguiente turno Miguel ganará.
   2era forma: En el momento en que dos líneas en la misma dirección queden a distancia 1, el siguiente jugador puede buscar cualquiera de las líneas continuas en su dirección y remarcar una junto a ella; así asegura ganar en ese turno. El máximo número de líneas en una dirección que se pueden escoger sin que haya dos a distancia 1 es 5 (las líneas 2, 4, 6, 8 y 10). Miguel puede jugar 5 veces sin perder escogiendo remarcar éstas. Como Luis empieza, si en 5 turnos de cada uno él no ha perdido, al poner la sexta línea con seguridad deja dos a distancia 1 y en su turno Miguel gana.

2. Notemos que 1 y 4 deben quedar separados y lo mismo debe ocurrir con 2 y 5 y con 3 y 6, puesto que cada una de estas parejas tiene el mismo residuo al dividirlo entre 3. La casilla grande puede llevar cualquiera de los números y entonces la que está esquinada con ella debe tener al otro número que tiene su mismo residuo (hasta aquí llevamos $6 \times 1 = 6$ posibilidades). Las casillas de arriba deben tener un número de cada una de las parejas y lo mismo pasa con las de la derecha. Entonces las posibilidades son $6 \times 4 \times 2 \times 2 \times 1 = 96$.

3. Como la suma de dos números impares es par y $2^{q+1}+1$ es impar, exactamente uno de p o q debe ser par; el único primo par es 2. Si $p = 2$, entonces tenemos que $2^q + q^2 = 2^{q+1} + 1$, es decir, $q^2 - 1 = 2^{q+1} - 2^q = 2^q$. Para $q = 3$, tenemos que la ecuación se cumple; para $q > 3$ es claro que el lado derecho es mayor que el izquierdo. Si $q = 2$, entonces la ecuación es $p^2 + 2^p = 2^{2+1} + 1 = 9$.. Como $p \geq 3$ el lado izquierdo es claramente mayor que 9, así que nunca se cumple. Entonces la única solución es $p = 2$ y $q = 3$.

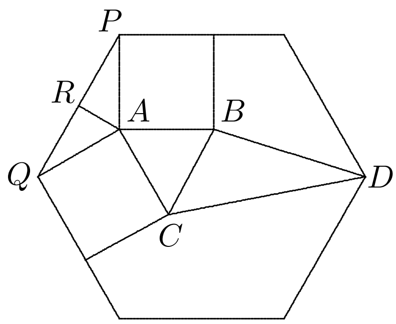
4. Llamemos a, b y c a las medidas que se muestran en la figura. Observando que todos son cuadrados, las tres medidas deben satisfacer

$$4 + a = b + 2,$$
$$5 + a = b + c,$$
$$3 + c = b + 1.$$



Restando la primera de la segunda obtenemos $c = 3$; sustituyendo en la tercera obtenemos $b = 5$ y, finalmente, sustituyendo en la primera tenemos $a = 3$. Entonces el área buscada es $a(b + c) = 24$.

5. Sean P, Q y R los vértices marcados en la figura.



(a) Por simetría, el triángulo ABC es isósceles. Por otro lado, como cada ángulo interior del hexágono mide 120°, tenemos que $\angle QPA = 30°$; además APQ es isósceles, así que $\angle PAQ = 120°$ y así, $\angle BAC = 60°$ y el triángulo ABC es equilátero.

(b) Para obtener la longitud de PA observemos que el triángulo PAR es la mitad de un triángulo equilátero con altura $PR = \frac{\sqrt{3}}{2}$, así que su hipotenusa PA mide 1.

(c) Por simetría, BC y PQ son paralelas y la distancia entre ellas es la suma de AR y la altura de ABC, o sea $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. La distancia entre dos lados opuestos del hexágono es el doble de la altura de un triángulo equilátero de lado $\sqrt{3}$, o sea 3. Entonces la altura de BCD en D es $3 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$ y, por tanto, el área de BCD es $\frac{\frac{5-\sqrt{3}}{2} \times 1}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{4}$.

6. Observemos que cualquier movimiento permitido cambia un número par (2 o 4) de los cuadritos sombreados en la figura de abajo. Como al principio uno de ellos es negro, el número de cuadros negros que quedan en cualquier momento en esos lugares es 1 o 3. De esta manera, no se puede lograr que todos los cuadros sean del mismo color. (Nota: Un argumento similar se puede aplicar a toda la orilla del cuadrado).