SOLUCIONES DEL EXAMEN DE LA ETAPA SEMIFINAL ESTATAL DE LA 21ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

1. El doble de un dígito sólo puede ser

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \text{ y } 18.$$

Los números que son $<a>$ para algún a satisfacen:
(i) La única cifra impar que pueden tener es 1, y esto ocurre sólo cuando la cifra correspondiente de a es 5, 6, 7, 8 o 9.
(ii) No tienen dos $1'$s seguidos.
(iii) La cifra de las unidades no es 1.
Si un número n satisface las tres condiciones (i), (ii) y (iii) entonces juntemos cada 1 con la cifra a su derecha (que debe ser par) y dejemos las demás cifras solas. Una vez que hemos agrupado así las cifras de n, la única a tal que $<a>= n$ se obtiene dividiendo cada grupo entre 2.

2. Por ser BXC un triángulo isósceles, los ángulos $\angle XCB$ y $\angle BXC$ son iguales. Los triángulos ABC y ADX son rectángulos y el ángulo en A es igual en ellos así que el otro ángulo también es igual, es decir: $\angle AXD = \angle ACB$. Pero entonces

$$\angle AXD = \angle ACB = \angle XCB = \angle BXC,$$

de donde $\angle AXD = \angle BXC$ y como uno de los lados de estos ángulos es AC, la única posibilidad es que B, X y D estén alineados.

3. La única forma en que Piolín puede recoger el pan es avanzando 6 números en un vuelo. Entonces al menos se necesitan 6 vuelos (pues cada vuelo puede incrementar el anterior en 1 solo número).
Veamos que con 6 no se puede: Si se pudiera, entonces la única sucesión de vuelos que lo lograría sería 1, 2, 3, 4, 5 y 6; además en el último vuelo debería salir por el número 12, así que en el penúltimo vuelo debería estar en el número 6. Sin embargo, no es posible llegar a un número de la forma $12k + 6$ (que correspondería a estar en el número 6 del reloj) haciendo operaciones de la forma $12 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$, pues éste es un número impar (hay tres impares entre ellos).
Ahora veamos que con 7 vuelos sí es posible: Basta avanzar en el sentido de las manecillas del reloj en vuelos sucesivos:

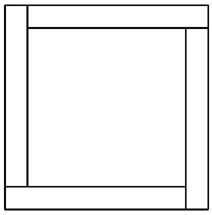
$$1, 2, 3, 3, 4, 5, 6.$$

En efecto,

$$12 + 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 30 = 12 \cdot 2 + 6,$$

que corresponde a haber dado 2 vueltas completas para terminar en el 6 en el penúltimo vuelo.

4. *Primera forma.* Contemos de dos maneras distintas el número de cuadritos en una cuadrícula de $n \times n$. Por un lado es claro que éste número es n^2. Por otro lado, observemos que la orilla de la cuadrícula se puede partir en 4 franjas, cada una con $n-1$ cuadritos como indica la figura.



En el centro queda un cuadrícula de $(n-2)\times(n-2)$ cuya orilla se puede volver a partir en franjas de la misma forma. Si n es impar entonces al repetir esto lo más posible sobra un cuadrito en el centro. Entonces, en este caso (n impar) tenemos que

$$n^2 = 4(n-1) + 4(n-3) + 4(n-5) + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 1.$$

La fórmula que tenemos se obtiene sustituyendo $A = n = 2007$ en la expresión.
Segunda forma. Sabemos que para cualquier n entero positivo

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Usando esta fórmula tenemos:

$$\begin{aligned} A^2 - 1 &= 4 \cdot 2006 + 4 \cdot 2004 + 4 \cdot 2002 + \cdots + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \\ &= 8(1003 + 1002 + 1001 + \cdots + 1) \\ &= 8\left(\frac{1003 \cdot 1004}{2}\right) = 4(1003 \cdot 1004) = 2006 \cdot 2008. \end{aligned}$$

Por otro lado $A^2 - 1 = (A-1)(A+1)$, así que $A = 2007$.
Tercera forma. (Para alumnos que saben inducción.) Analizando la expresión de derecha a izquierda observamos que:

$$\begin{aligned} &1 = 1^2, \\ &1 + 4 \cdot 2 = 9 = 3^2, \\ &1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 25 = 5^2, \\ &1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 49 = 7^2, \end{aligned}$$

Conjeturamos entonces que

$$1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + \cdot + 4 \cdot 2k = (2k+1)^2.$$

Tomando esto como hipótesis de inducción, probémoslo para $k+1$:

$$\begin{aligned} &1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + \cdot + 4 \cdot 2k + 4 \cdot 2(k+1) \\ &= (2k+1)^2 + 8(k+1) = 4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8 = 4k^2 + 12k + 3 = (2k+3)^2. \end{aligned}$$

En nuestro caso $k = 1003$, así que $A = 2007$.

5. *Primera forma.* Vayamos acomodando los niños de uno en uno. Cuando solo hay un niño, el número de formas de acomodarlo a él solo es 1. Al llegar el segundo niño, tiene dos posibilidades: quedar solo o formar una rueda con el primero; así que cuando son dos niños hay dos formas en total de acomodarlos. Cuando llega el tercer niño, entonces puede quedar solo o cualquiera de los otros dos niños puede tomarlo con su mano derecha, invitándolo a la rueda donde haya quedado; de esta manera, el número de acomodos con tres niños se obtiene multiplicando por 3 el número de acomodos con 2 niños, así que con tres niños el número de acomodos es $3 \times 2 = 6$. Es claro que este patrón que hemos seguido puede continuarse, de manera que 4 niños se pueden acomodar de $4 \times 3 \times 2$ formas y 5 niños se pueden acomodar de $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$.
   Segunda forma. Numeremos a los niños y contemos las posibilidades de acomodarlos dependiendo del número de niños que quedan en cada rueda.
   $*$ Si queda una sola rueda, entonces el número de posibilidades es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ pues un niño puede entrar en la rueda en cualquier lugar y después lo importante es quien queda a la derecha de él y luego a la derecha de este otro y así sucesivamente).
   $*$ Si queda una rueda con 4 niños y otra con 1 niño, entonces el niño que está solo puede ser elegido de entre 5 y los otros cuatro pueden acomodarse de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas. En total en este caso son $5 \cdot 6 = 30$.
   $*$ Si queda una rueda con 3 y otra con 2, los niños que quedan en la de 2 pueden elegirse de 10 formas $((1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4)(3,5),(4,5))$; los otros tres forman su rueda de $2 \cdot 1$ formas. En total en este caso las posibilidades son $10 \cdot 2 = 20$.
   $*$ Si queda una rueda con 3 niños y dos ruedas con un niño cada una, entonces, las formas de escoger los dos niños que quedan solos son 10, como vimos arriba; los niños restantes se acomodan de $2 \cdot 1 = 2$ formas en su rueda, así que el total en este caso es $10 \cdot 2 = 20$.
   $*$ Si quedan dos ruedas con 2 niños y una con 1, entonces hay que escoger el niño que queda solo (5 posibilidades); luego, hay que dividir a los otros cuatro en dos grupos de 2, lo cual se puede hacer de 3 maneras (por ejemplo, si los niños que quedaron para dividirse son 1, 2, 3 y 4, para contarlos basta ver con quién queda el niño 1 y tiene 3 posibilidades). Una vez que quedan divididos, las ruedas quedan determinadas. Entonces las posibilidades en este caso son $5 \cdot 3 = 15$.
   $*$ Si queda una rueda con dos niños y tres ruedas con un niño, entonces basta escoger los dos niños que quedan juntos, lo cual, como vimos arriba, puede hacerse de 10 formas.
   $*$ Sólo hay una posibilidad de que haya 5 ruedas, cada una con un niño.
   En total el número de distribuciones es:

$$24 + 30 + 20 + 20 + 15 + 10 + 1 = 120.$$

6. Queremos que cada cuadro cambie de color un número impar de veces. Notemos que el orden en que se realicen los cambios es irrelevante. Cada cuadro cambia de color al escoger cualquiera de los cuadros que están en diagonal con él; es fácil darse cuenta que en todos los casos hay un número impar de cuadros en su diagonal. Entonces, si escogemos una vez cada cuadro, todos quedarán grises al final.
   Hay muchas otras formas de lograr que todos queden grises; por ejemplo pueden escogerse todos los cuadros salvo los que están en las dos diagonales mayores, y en ellas sólo escoger el cuadro central. En la figura se marcan con $\bullet$ éstas para $n = 7$.

	•	•	•	•	•	
•		•	•	•		•
•	•		•		•	•
•	•	•	•	•	•	•
•	•		•		•	•
•		•	•	•		•
	•	•	•	•	•	