# Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la 23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2009

1. Todos los multiplos de 3 deben estar separados, así que por lo menos hay 33 montones. Es posible con 33 montones poniendo al 3 con todos los que dejan residuo 2 al dividirlos entre 3 (es decir: $2, 5, 8, 11, \ldots, 98$), al 6 con el 1, el 4 y el 7; y a partir de 9, todos los múltiplos de 3 con su sucesor (esto es 9 con 10, 12 con 13, 15 con 16, y así sucesivamente hasta 99 con 100). Entonces 33 es el mínimo.

2. Forzosamente el camino debe pasar por $L$ o por $C$. Para llegar de $L$ a $Z$ se puede seguir el segmento $LQ$, después el $QR$ y después el $RZ$ o también se puede ir por $LH$ y después $HZ$, pero éstos tienen la misma longitud por ser $QHZR$ un paralelogramo. Para llegar de $C$ a $Z$ el camino más corto es por el segmento $CS$, después el $SR$ y después el $RZ$. Es claro que este camino tiene la misma longitud que cualquiera de los dos que mencionamos de $L$ a $Z$. Entonces basta comparar el camino de $A$ a $L$ con el de $A$ a $C$. Para llegar de $A$ a $L$ tenemos dos posibilidades: ir por el segmento $AN$ y después el arco $\text{arc}(NL)$ o ir por el segmento $AO$ luego el segmento $OE$ y después el arco $\text{arc}(EL)$. Cualquiera de éstos es más largo que $|AC|$ pues $|AN| + |\text{arc}(NL)| > |AN| + |NL| = |AN| + |NB| = |AB| = |AC|$. Entonces el camino más corto tiene longitud

$$|AC| + |CS| + |SR| + |RZ| = 2 + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Por ser la diferencia entre dos cifras consecutivas siempre de 1, el número debe ir alternando 2 con 1 o 3, es decir, el número debe ser $2*2*2*2*2*2*2*2*2*2$ o $*2*2*2*2*2*2*2*2*2*$ donde en lugar de $*$ puede ir 1 o 3. En el primer caso hay $2^9$ posibilidades y en el segundo hay $2^{10}$, así que en total son $2^9 + 2^{10} = 2^9(1+2) = 512 \cdot 3 = 1536$.

4. Observemos primero que $84 = 3 \cdot 4 \cdot 7$. Por otro lado tenemos que $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$ es el producto de tres enteros consecutivos que siempre es múltiplo de 3, así que sólo basta ver que sea múltiplo de 7 y de 4; para ello, alguno de los números $a - 1$. $a$ y $a + 1$ debe ser múltiplo de 7 y debe haber dos pares entre esos tres números o uno de ellos debe ser múltiplo de 4. Analicemos las posibilidades para $(a-1, a, a+1)$ cuando alguno de los números es múltiplo de 7:
$(5, 6, 7)$ tiene sólo un par no múltiplo de 4 así que no.
$(6, 7, 8)$ tiene dos pares, así que sí.
$(7, 8, 9)$ tiene un múltiplo de 4, así que sí.
$(12, 13, 14)$ tiene dos pares así que sí.
$(13, 14, 15)$ tiene sólo un par no múltiplo de 4 así que no.
$(14, 15, 16)$ tiene dos pares, así que sí.
$(19, 20, 21)$ tiene un múltiplo de 4, así que sí.
$(20, 21, 22)$ tiene dos pares, así que sí.
$(21, 22, 23)$ tiene sólo un par no múltiplo de 4 así que no.
En total son 6.

5. *Primera forma:* Prolonguemos el lado $AB$ hasta un punto $C'$ de tal manera que $|BC| = |BC'|$. Entonces queremos probar que $|AC'| = |AE|$. Tenemos que $\angle CAB = 180^\circ - (20^\circ +$

$40^o) = 120^o$, de donde $\angle CAE = 60^o = \angle EAB$ y entonces $\angle CAC' = 180^o - (60^o + 60^o) = 60^o$. Como el triángulo $C'BC$ es isósceles tenemos que $\angle BC'C = \angle BCC' = \frac{180^o - 20^o}{2} = 80^o$ y entonces $\angle C'CA = 80^o - 40^o = 40^o$. Por otro lado $\angle AEC = 180^o - (60^o + 40^o) = 80^o$ y de aquí que los triángulos $C'AC$ y $EAC$ son iguales y entonces $|AC'| = |AE|$, como queríamos probar.
*Segunda forma:* Sea $D$ el punto en el segmento $EC$ tal que $\angle DAC = 40^o$. Como en la primera forma, $\angle CAB = 180^o - (20^o + 40^o) = 120^o$, de donde $\angle CAE = 60^o = \angle EAB$. Entonces $\angle DAE = 20^o$. Por otro lado, $\angle AEB = 180^o - (60^o + 20^o) = 100^o$, de donde $\angle AED = 180^o - 100^o = 80$ y de aquí que $\angle ADE = 180^o - (20^o + 80^o) = 80^o$. Tenemos entonces que los triángulos $AED$, $ADC$ y $ABD$ son isósceles y entonces $|BC| - |AB| = |BC| - |BD| = |DC| = |AD| = |AE|$.
*Tercera forma.* Sea $D$ un punto sobre el lado $BC$ tal que $BD = AB$. Queremos probar que $DC = AE$. Por construcción, el triángulo $ABD$ es isósceles; por tanto $\angle BDA = \angle BAD = \frac{180^o - 20^o}{2} = 80^o$. Como en las otras formas, $\angle CAB = 180^o - (20^o + 40^o) = 120^o$, de donde $\angle CAE = 60^o = \angle EAB$. Entonces $\angle AEC = 180^o - (60^o + 40^o) = 80^o$; así el triángulo $DAE$ es isósceles con $AE = AD$ y $\angle DAE = 20^o$; de aquí que $\angle CAD = 60^o - 20^o = 40^o$ y, por tanto $DAC$ también es isósceles. En conclusión $DC = AD = AE$ como queríamos probar.

6. De la primera columna debe salir una flecha; ésta puede salir de cualquiera de los 3 puntos y entonces puede llegar a cualquiera de los 4 puntos que no están en su renglón ni en su columna. Sin pérdida de generalidad supongamos que va de el punto de arriba a la izquierda al punto central (en la segunda columna). Analicemos las tres posibilidades que tiene la flecha que sale de la segunda columna.
(a) No puede salir del primer renglón (pues ya había una flecha que salía del primer renglón.
(b) Si sale del punto central entonces no puede llegar al primer renglón pues esto llevaría a que en el tercer renglón la flecha empezara y terminara ahí, lo cual es imposible; entonces su única posibilidad es que vaya al tercer renglón. En este caso la flecha que sale de la tercera columna debe salir del punto de más abajo y llegar al punto de la primera columna y primer renglón y ésta es una posibilidad (ver la figura de la izquierda).
(c) Si sale del tercer renglón entonces, como antes, no puede llegar a la primera columna (pues la flecha de la tercera columna empezaría y terminaría ahí mismo); entonces debe llegar a la tercera columna y primer renglón; pero entonces la flecha que sale de la tercera columna debe salir del segundo renglón y llegar a la primera columna en el tercer renglón y ésta es otra posibilidad (ver la figura de la derecha).
Entonces son $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ posibilidades.