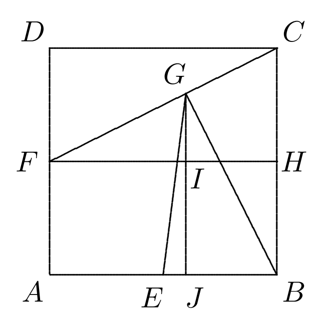
Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2012

1. En la primera vuelta se descartan todas las impares que son $2012/2 = 1006$. En la segunda vuelta se descartan las que tienen número de la forma $4k+2$ que son $2012/4 = 503$. En la tercera vuelta se descartan las que tienen número de la forma $8k+4$ y, como $2012 = 8 \cdot 251 + 4$, la tarjeta 2012 queda descartada al final de esta vuelta y el número de tarjetas que se descartaron en la vuelta fue $251+1$ (pues los posibles valores para k en esta vuelta son $0, 1, 2, \ldots, 251$). El total de tarjetas descartadas es $1006 + 503 + 252 = 1761$, así que el número de cartas que quedan es $2012 - 1761 = 251$.

2. Como $52 + 40 + 1 = 93$, en cada montón deberá haber al final $93/3 = 31$ piedras. De A sólo se quitan piedras así que es claro que podemos considerar que los movimientos se hacen empezando por quitar todas las piedras necesarias de A. Llamemos b al número de movimientos que se hacen para mandar piedras de A a B, y sea c el número de movimientos que se hacen para mandar piedras de A a C. Entonces $52 - 5b - 3c$ debe ser 31, o sea que $3c = 21 - 5b$, y como b y c son enteros no negativos, las únicas posibilidades son $b = 0$ y $c = 7$, o $b = 3$ y $c = 2$. El primer caso es imposible porque B tendría las mismas 40 piedras del principio y, quitándole de 4 en 4 no es posible dejarle 31. En el segundo caso, después de que reciba las 15 piedras de A, B tendrá 55 piedras y, para que al final quede con 31 habrá que quitarle 24, es decir, hacer 6 veces la operación de B a C. El número total de operaciones es $3 + 2 + 6 = 11$.

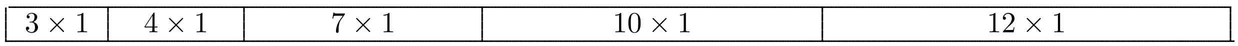
3. Sean H el punto medio del lado BC e I y J los pies de las alturas desde G hacia los segmentos FH y AB, respectivamente. Los triángulos CFH y GFI son semejantes así que la razón entre sus alturas es la misma que entre sus hipotenusas:



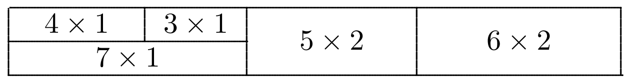
$$\frac{CH}{GI} = \frac{CF}{GF} = \frac{CG + GF}{GF} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3},$$

pero $CH = 1$, así que $GI = \frac{3}{5}$ y entonces $GJ = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$. El área buscada es $\frac{1 \cdot \frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5}$.

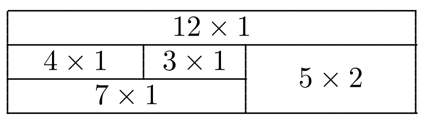
4. El rectángulo que buscamos tiene área $3+4+7+10+12=36$. Entonces el rectángulo debe ser de 36×1, de 18×2, de 12×3, de 9×4 o de 6×6. Sin embargo, observamos que uno de los rectángulos ya partidos tiene área 7, así que la única posibilidad es que sea de 7×1, de donde vemos que el rectángulo grande no puede medir 6×6. En la siguiente figura se ilustra que todas las demás medidas mencionadas arriba son posibles y entonces los perímetros posibles son: $2(36+1)=74$, $2(18+2)=40$, $2(12+3)=30$, $2(9+4)=26$.



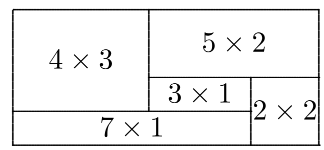
36×1



18×2



12×3



9×4

5. *Primera forma.* Como son números positivos tenemos que $ab<134$, de donde $a\leq\sqrt{134}$ y, por ser entero, $a\leq 11$. Por otro lado, observamos que no pueden ser ambos a y b impares pues 134 es par; también es imposible que sólo uno de ellos sea par pues el otro sería la diferencia de pares. Hasta aquí tenemos que ambos son pares y que $a\leq 10$. Además, podemos despejar b y tenemos $b=\frac{134-a}{1+a}$. Ahora analicemos las distintas posibilidades para a.

Si $a=2$, $b=\frac{132}{3}=44$.

Si $a=4$, $b=\frac{130}{5}=26$.

Si $a=6$, $b=\frac{128}{7}$, que no es entero.

Si $a=8$, $b=\frac{126}{9}=14$.

Si $a=10$, $b=\frac{124}{11}$, que no es entero.

Entonces las posibles soluciones son $(2,44)$, $(4,26)$ y $(8,14)$.

Segunda forma. Observemos que $(1+a)(1+b)=1+a+b+ab$, de donde $(1+a)(1+b)=135$. Como $135=3\cdot 3\cdot 3\cdot 5$, las distintas posibilidades de factorización de 135 como producto de dos enteros mayores que 1 son: $135=3\cdot 45$, $135=5\cdot 27$ y $135=9\cdot 15$. De aquí obtenemos las parejas (a,b): $(2,44)$, $(4,26)$ y $(8,14)$.

6. Cualquier corte debe pasar por el centro del cuadrado y a partir de ahí ya queda determinado para que las dos figuras que queden sean iguales. También podemos observar que el corte queda determinado por la elección de los tres puntos interiores del cuadrado a los que se llega verticalmente en cada uno de los niveles horizontales 1, 2 y 3. Como la elección de esos tres puntos se puede hacer de $5^3=125$ formas, éste es el número de cortes diferentes. Para entender esto mejor damos tres ejemplos en donde se ha marcado con $\bullet$ los puntos mencionados.