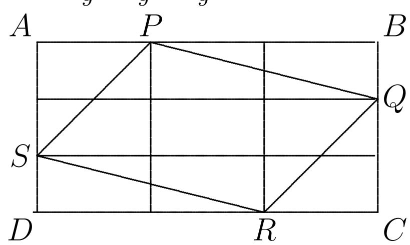
Soluciones de la 2a parte de la Etapa Semifinal Estatal de la 28ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2014

1. Se puede asegurar que al menos $85-(100-90)=75$ resolvieron los primeros dos problemas; que $80-(100-75)=55$ resolvieron los tres primeros problemas y que $70-(100-55)=25$ resolvieron los cuatro problemas.

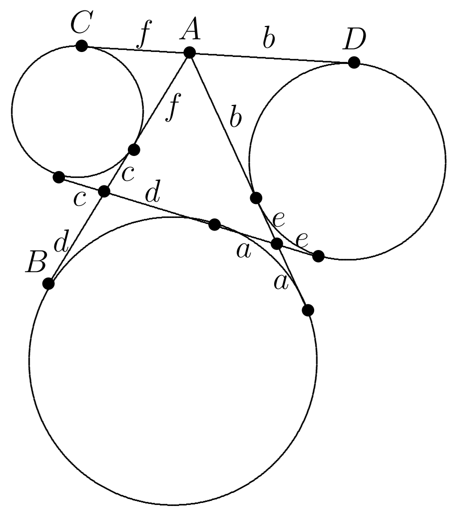
2. Dibujamos paralelas al lado AD por P y R y también al lado AB por S y Q. Cada uno de los rectángulos pequeños representa $\frac{1}{9}$ del área original. El área de los triángulos rectángulos que tienen como cateto un lado del rectángulo $PQRS$ es un $\frac{1}{9}$ del área de $ABCD$. Así, el área de $PQRS$ es $\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ del área de $ABCD$. La respuesta es d).



3. Llamemos a a la cantidad de tiros que acertaron a 8 puntos (o a 10) y b a los que acertaron a 5 puntos. Tenemos que $(10+8)a+5b=18a+5b=99$. Como 99 y 18 son múltiplos de 9, también lo debe ser b; por otro lado, también observamos que b debe ser impar ya que $5b$ sumado con un par $(18a)$ es impar (99). Es claro entonces que b debe ser 9 y entonces $a=3$. Entonces el número total de tiros que acertaron en el blanco es $3+3+9=15$. Como esos 15 tiros fueron el $75\,\%$ del total, tenemos que Aída hizo 20 disparos.

4. Se pueden distribuir en forma cíclica los 6, lo cual puede hacerse de $5!=120$ (por ejemplo: A regala a B, éste a C, y así sucesivamente y F le regala a A) o en dos ciclos, uno de tamaño 2 y el otro de tamaño 4, lo cual puede hacerse de $\binom{6}{2}3!=90$ formas, o en dos ciclos de tamaño 3, y eso puede hacerse de $\frac{1}{2}\binom{6}{3}2!2!=40$, o en tres grupos de 2 cada uno, que se puede hacer de $\frac{1}{3!}\binom{6}{2}\binom{4}{2}=15$. El total es de $120+90+40+15=265$.

5. Sabemos que si desde un punto exterior a un círculo se trazan las dos tangentes, entonces las distancias del punto exterior a los puntos de tangencia son iguales (esto es por simetría). Usando esto, llamemos a, b, c, d, e y f a las distancias indicadas en la figura.



También por simetría tenemos que

$$c + d + a + e = f + b \quad (*)$$

Por otro lado,

$$f + c + d = b + e + a \quad (**)$$

Sumando las ecuaciones $(*)$ y $(**)$ obtenemos

$$f + 2c + 2d + a + e = f + 2b + e + a$$

de donde $c + d = b$ y así $|CD| = f + b = f + c + d = |AB| = 10$.

6. Los múltiplos de 17 de dos cifras son: 17, 34, 51, 68 y 85. Los de 23 son: 23, 46, 69 y 92. Queremos juntar los números de esta lista para formar uno de 2008 cifras. Observemos que ningún número empieza en 7 así que no es posible usar el 17; por esta misma razón no es posible usar el 1 y entonces tampoco el 5 y de aquí que tampoco el 8. Los que sobran son: 34, 23, 46, 69 y 92. Al juntar éstos logramos 346, 234, 469, 692 y 923. Ahora, para juntar dos de éstos las posibilidades son: 3469, 2346, 4692, 6923 y 9234. Aquí ya vemos que al repetir cíclicamente 34692 formamos un número como el buscado y lo mismo con 23469, 46923, 69234 y 92346. Ahora, los números 17, 51, 68 y 85 pueden agregarse a continuación del dígito 6 en los las repeticiones cíclicas de los 5 números dados, es decir, faltaría agregar 4 números que son los terminados en: 68517, 6851, 685 y 68. En total son 9 números.