Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la 29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2015

1. Vamos a ver que la única solución para xyz es 189. Observemos primero que, como $3 \times 99 = 297$, seguro la primera cifra de la suma es 1 o 2. Llamemos S a la suma. Tenemos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{r} y\,x \\ y\,z \\ x\,z \\ \hline S \;=\; x\,y\,z \end{array}$$

Observamos que las posibilidades para la cifra de las unidades son:

$$x + 2z = \begin{cases} z, \\ z + 10, \\ z + 20 \end{cases}$$

El primero y tercer casos son claramente imposibles. Para el segundo caso tenemos $x + z = 10$. También sabemos que $x = 1$ o $x = 2$.

Si $x = 1$ entonces $z = 9$ y en la cifra de las decenas tenemos

$$\begin{aligned} 1 + 2y + x &= 10x + y \\ y + 2 &= 10 \\ y &= 8. \end{aligned}$$

Aqui tenemos la solución $S = 189$.

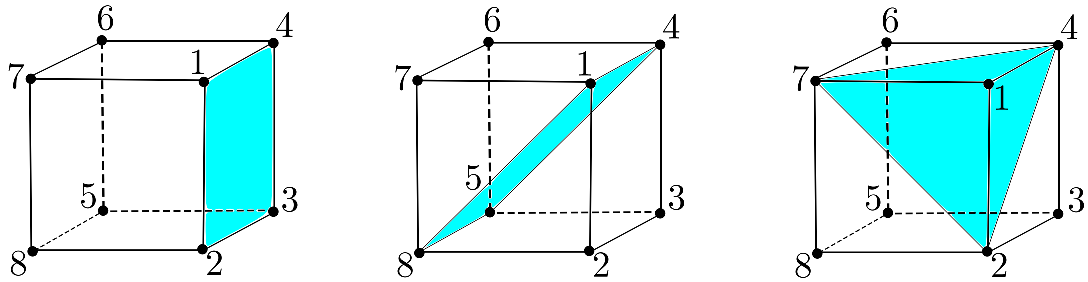
Si $x = 2$ entonces $z = 8$ y en la cifra de las decenas tenemos

$$\begin{aligned} 1 + 2y + x &= 10x + y \\ 1 + 2y + 2 &= 20 + y \\ y &= 17 \end{aligned}$$

Como la solución no es un dígito, este caso es imposible.

2. Nombremos a los vértices con números como se muestra en la figura. Si A y B son dos vértices que forman arista, a la arista la nombramos AB. De la misma manera, si A, B, y C son vértices del cubo que determinan un plano, al plano lo denotaremos por ABC, y si otro vértice D (distinto de A, B y C) pertenece al plano ABC, el mismo plano lo podemos escribir como $ABCD$.

Las 6 caras del cubo determinan 6 planos (1234, 3465, 5678, 7821, 1467 y 2358). Los vértices de aristas opuestas como 14 con 58 determinan, cada una, un plano; de este estilo tenemos 6, a saber, 1458, 4628, 6723, 1735, 1256 y 3478. Los planos que hemos contado hasta ahora contienen, todos, alguna arista. Nos falta contar planos como el determinado por 247 y observamos que los vértices que lo forman son los adyacentes a uno mismo (por ejemplo, 2, 4 y 7 son los vértices adyacentes a 1). Así tenemos 8 planos más (uno por cada vértice: 247, 138, 245, 136, 368, 457, 168 y 257). En total son 20.



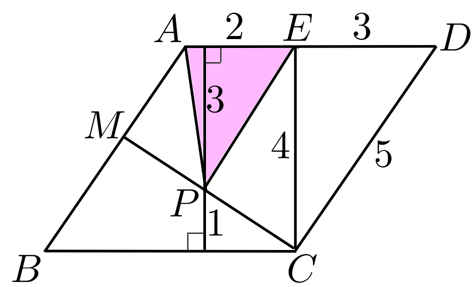
3. Como el área es 20 y el lado es 5, tenemos que $|CE| = \frac{20}{5} = 4$. Entonces, en el triángulo rectángulo DEC, la hipotenusa DC mide 5 y el cateto EC mide 4, de donde, por Pitágoras,

$$|ED| = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

De aquí obtenemos que $|AE| = 2$.

Por otro lado, el que P sea punto medio de MC nos dice que la distancia de P a BC es la mitad de la distancia de M a BC la cual, a su vez, es la mitad de la distancia de A a BC y ya sabemos que esta última es 4, así que la distancia de P a BC es 1 y la distancia de P a AD (esto es, la altura del triángulo AEP en P) es 3.

El área buscada es $\frac{2\times 3}{2} = 3$.



4. *Primera forma.* Si hubiera 3 números pares o más, digamos que a, b y c son pares, entonces las sumas de parejas de ellos serían todas 38:

$$\begin{aligned} a+b &= 38 \\ b+c &= 38 \\ a+c &= 38 \end{aligned}$$

Restando cualesquiera dos de estas ecuaciones deducimos que $a = b = c$ y entonces $a = b = c = \frac{38}{2} = 19$, contradiciendo que a, b y c son pares.

Entonces, por lo menos hay tres impares y, otra vez, si a, b y c son impares, sus sumas de parejas de ellos es 38 de donde, como arriba, tenemos que $a = b = c = \frac{38}{2} = 19$. Los otros dos números deben ser $31 - 19 = 12$ y $45 - 19 = 26$. Como $12 + 26 = 38$, que está en la lista de sumas, los números buscados son éstos, es decir: 19, 19, 19, 12 y 26.

Segunda forma. Ordenemos los números de menor a mayor: $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Como $31 \leq 38 \leq 45$, los dos primeros números suman 31 y los dos últimos suman 45:

$$\begin{aligned} a+b &= 31, \\ d+e &= 45. \end{aligned}$$

Pero 31 y 45 son impares, así que $a \neq b$ y $d \neq e$ y entonces $a+d < a+e < b+e$, de donde

$$\begin{aligned} a+d &= 31, \\ a+e &= 38, \\ b+e &= 45. \end{aligned}$$

Ya teníamos que $a+b=31$ y ahora tenemos que $a+d=31$ y, como $b \leq c \leq d$ resulta que $b=c=d$. De $a+b=31$ y $a+e=38$, obtenemos $e-b=7$ que, junto con $b+e=45$ nos da $2e=52$, de donde $e=26$ y de aquí $b=c=d=19$ y $a=12$.

5. Como el número de vértices es 73, cada triángulo tiene tres vértices y $3 \times 24 = 72$, no sería posible abarcar todos los vértices con menos de 25 triangulitos. Veremos que con 25 es suficiente. Para ello presentaremos aquí una forma de sombrear 25 triangulitos que abarcarán todos los vértices. Empecemos por remarcar algunos hexágonos como se muestra en la primera figura y notemos que forzosamente deben escogerse los triangulitos en los picos de la estrella y al menos uno en cada hexágono. Escojamos entonces primero los picos de la estrella y los triangulitos como se muestra en la segunda figura (están situados todos de la misma manera respecto al pico). A continuación se escogen 6 triangulitos más (situados de la misma manera respecto al hexágono central). Sólo falta escoger cualquier triangulito en el hexágono central y es fácil verificar que así cada vértice pertenece a alguno de los triangulitos escogidos.