Soluciones de los problemas

Solución del problema 1. Recordemos que si la descomposición en primos de un entero positivo n es $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, este número tendrá $(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$ divisores. Por este hecho, vemos que hay únicamente tres opciones para la descomposición en primos de n: p^7, p^3q y pqr (donde p, q y r son primos diferentes). Veamos cada caso.

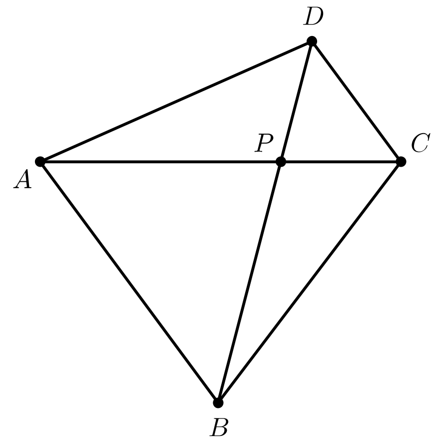
- $n=p^7$. En este caso se tiene que la descomposición en primos de n^3 es p^{21}, por lo que tiene 22 divisores.
- $n=p^3q$. Tenemos que $n^3=p^6q^2$ tiene 21 divisores.
- $n=pqr$. Aquí, $n^3=p^3q^3r^3$ tiene 64 divisores.

Por lo tanto, n^3 tendrá a lo más 64 divisores positivos.

Solución del problema 2. Primero tomemos una moneda de cada una. Como llevamos 0.80, basta juntar 1.70 con las otras y ya con esto tendremos al menos una de cada una. Notemos que si elegimos la cantidad de monedas de 0.50 y de 0.20, sin que se pase de 1.70, el número de monedas de 0.10 quedará determinado. Podemos usar 0, 1, 2 o 3 monedas de 0.50. Si usamos 3, podemos usar 0 o 1 de 0.20, es decir, 2 opciones. Si usamos 2 monedas de 0.50, podemos usar 0, 1, 2 o 3 de 0.20, es decir, 4 opciones. De la misma manera, si usamos 1 o 0 monedas de 0.50, tenemos 7 y 9 opciones. Por lo tanto, el total de opciones de igual a $2+4+7+9=22$.

Solución del problema 3. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\frac{a}{b+c}=\frac{1}{3}$ y $\frac{b}{c+a}=2$ y tenemos que encontrar el valor de $\frac{c}{a+b}$. Luego, tenemos que $3a=b+c$ y $b=2c+2a$. Multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 4, tenemos que $9a=3b+3c$ y $4b=8c+8a$. Sumando estas dos ecuaciones tenemos que $9a+4b=8a+3b+11c$, de donde $a+b=11c$ y $\frac{c}{a+b}=\frac{1}{11}$.
Nota. Para saber por qué números tenemos que multiplicar las ecuaciones, basta considerar que si la primera ecuación la multiplico por u y la segunda por v, al sumar las ecuaciones obtenemos $(3u-2v)a+(v-u)b=(u+2v)c$. Para poder obtener $\frac{c}{a+b}$, necesitamos que los coeficientes de a y b en esta última ecuación sean iguales, es decir, $3u-2v=v-u$, o $4u=3v$, de donde podemos elegir $u=3$ y $v=4$.

Solución del problema 4. Notamos que los triángulos APD y DPC comparten la altura desde D, por lo que la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases. Luego, el área de APD es el doble del área de DPC, de donde el área de DPC es igual a $2\,u^2$. De la misma manera, el área del triángulo APB es el doble que el área del triángulo PBC, de donde el área del triángulo APB es igual a $8\,u^2$.



Luego, el área del cuadrilátero es igual a $4 + 4 + 2 + 8 = 18\,u^2$.

Solución del problema 5. Notamos que

$$N = 999999999(1000000001000000001\ldots1000000001)$$

donde el segundo factor está formado por diez unos, separados cada uno por 8 ceros. La suma de dígitos de este segundo factor es 10, por lo que este no es divisible entre 3 y basta buscar la máxima potencia de 3 que divide a $999999999 = 9(111111111)$. La suma de dígitos de 111111111 es 9, por lo que es divisible entre 9. Dividiendo entre 9 obtenemos que

$$111111111 = 9 \cdot 12345679.$$

Como la suma de los dígitos de 12345679 es igual a 37, este número no es múltiplo de 3, por lo que la máxima potencia de 3 que divide a N es igual a $9 \cdot 9 = 81 = 3^4$.

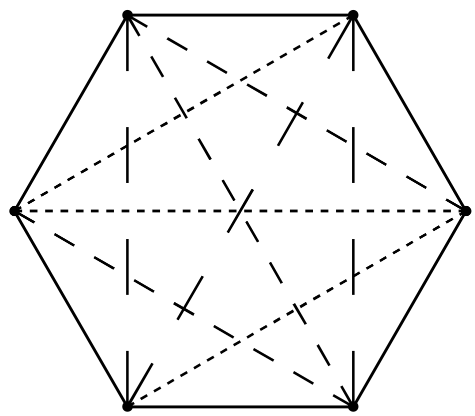
Solución del problema 6. Si el número tuviera más de 4 dígitos y comienza con el dígito a, el número obtenido después de quitar la suma de los dígitos sería al menos $9999a \geq 9999$, lo cual es una contradicción y el número tiene que tener cuatro dígitos (no puede tener menos pues es mayor que 2016). Digamos que este número es $abcd$ en notación decimal (con $a \neq 0$), es decir, el número puede escribirse como $1000a + 100b + 10c + d$. La suma de sus dígitos es $a + b + c + d$, por lo que

$$(1000a + 100b + 10c + d) - (a + b + c + d) = 2016.$$

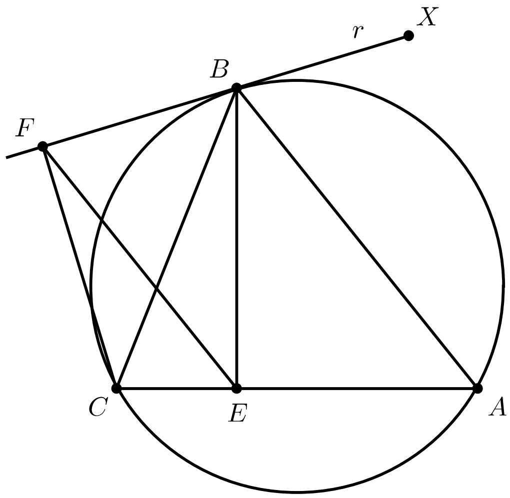
de donde $999a + 99b + 9c = 2016$. Si $a = 1$ tendríamos que el máximo valor de $999a + 99b + 9c$ sería $999 + 99 \cdot 9 + 9 \cdot 9 = 1971$, lo cual es una contradicción y $a = 2$. Sustituyendo tenemos que $99b + 9c = 18$. De aquí obtenemos que $b = 0$ y

$c = 2$ (notamos que el valor de d no importa). Luego, los números que cumplen son 2020, 2021, 2022, $\ldots$, 2029.

Solución del problema 7. Primero, notamos que las tres diagonales principales (aquellas que van de un vértice al opuesto) se intersectan todas en el centro del hexágono. Esto demuestra que se necesitan al menos 3 colores. El siguiente dibujo demuestra que el arreglo es posible con tres colores, por lo que 3 es la respuesta.



Solución del problema 8. Tenemos que los ángulos $\angle BEC$ y $\angle CFB$ son rectos, por lo que el cuadrilátero $BFCE$ es cíclico (pues la suma de sus ángulos opuestos es $180°$). Luego, $\angle EFB = \angle ECB$. Por otro lado, los ángulos $\angle ECB$ y ABX abarcan el mismo arco AB del circuncírculo del triángulo ABC, por lo que son iguales. Combinando estas dos igualdades de ángulos, tenemos que $\angle BFE = \angle XBA$, por lo que EF es paralela a AB.


X
r
B
F
C
E
A